NOVÉ EXPLICITNÍ VZTAHY PRO VYJÁDŘENÍ TERMINÁLNÍCH PÁDOVÝCH RYCHLOSTÍ TUHÝCH ČÁSTIC

MILOSLAV HARTMAN, OTAKAR TRNKA a MICHAEL POHOŘELÝ

Ústav chemických procesů, Akademie věd České republiky, v.v.i., Rozvojová 135, 165 02 Praha 6-Suchdol
hartman@icpf.cas.cz

Došlo 17.12.08, přijato 20.2.09.

Klíčová slova: fluidace, sedimentace, pádová rychlost, součinitel odporu, tuhé částice

Úvod

V rámci studia chování fluidních reaktorů[1–16] jsme se v uplynulém období podrobně zabývali také problematikou terminálních pádových (sedimentačních, úletových) rychlostí sférických i nesférických tuhých částic. Výsledky jednotlivých prací jsme prezentovali v desítce sdělení a naše výzkumné aktivity v tomto směru před několika lety skončily. Souhrou okolností nedávno objevený a neprávem opomíjený přístup Abrahama[17] nás svou jednoduchostí a užitečností zaujal natolik, že se jím v této práci zabýváme blíže.

Při řešení hydrodynamických úloh obtékání tuhých těles se vyskytuje součinitel odporu samostatně v závislosti na režimu toku. V technické praxi (např. při fluidaci či sedimentaci) obvykle hledáme terminální (ustálenou) pádovou či úletovou rychlost zájmové částice. Časté jsou také případy, kdy pro danou pádovou rychlost (rychlost proudění tekutiny) určujeme průměr / velikost částice. Čistě teoretické výpočty jsou možné jen pro koule v oblasti plíživého (velmi pomalého) proudění, kde platí Stokesův zákon, tj. pro $Re_t < 0{,}1$. Závislost součinitele odporu pro $Re_t > 0{,}1$ je dána z pokusných výsledků.

Je zřejmé, že k rozdílnostem v experimentálních datech přispívá i skutečnost, že se při obtékání těles uplatňuje jak odpor tvarový, tak i odpor vyvolaný třením. Hlavní příčina v nesnadné regresi pokusných výsledků plyne především z neobvyklé šíře potřebného rozsahu podmínek toku ($Re_t \in <0{,}1;10^5>$). Ve svém souborném článku[13] jsme prezentovali řadu regresních či korelačních vztahů typu $C_D = C_D\,(Re_t)$ svých i jiných autorů pro kulovité částice, pokrývajících různě široké oblasti hodnot Re_t. Např. Clift a spol.[18] doporučují pro součinitel odporu šestisegmentovou korelaci obsahující celkem 18 empirických konstant. Jednosegmentové regresní rovnice s pěti nastavitelnými parametry odvodili Flemmer a Banks[19] a Turton a Levenspiel[20]. Vzhledem k jejich délce a komplikovanosti tyto rovnice neuvádíme a odkazujeme čtenáře na literaturu[13,18–20]. Přes jistý pokrok, problém vlivu tvaru částic na pádovou rychlost není dosud rigorozně vyřešen[15,21–23]. Zvláště u částic větších průměrů se může uplatnit i případný vliv stěn.

Cílem této práce je navrhnout na základě Abrahamova přístupu soubor neobyčejně jednoduchých explicitních vztahů, umožňujících velmi rychlé, nicméně velice přesné výpočty součinitele odporu, terminální pádové rychlosti dané kulovité částice a/nebo průměru částice pro zvolenou (zájmovou) pádovou rychlost.

Experimentální část

Pádové rychlosti byly měřeny v centrální sekci termostatovaného skleněného válce[8] o průměru 10 cm a výšce 150 cm se systémem skleněné kuličky – dimetylester kyseliny ftalové, při teplotě 25 ± 0,05 °C. Reprodukovatelnost měření činila ±0,03–0,05 cm^{-1} s. Velikost částic se pohybovala od 0,463 do 4,911 mm, hustota jednotlivých částic byla stanovována pyknometricky a pohybovala se mezi 2454 a 2704 kg m^{-3}. Naměřené hodnoty hustoty a viskozity dimetylesteru kyseliny ftalové činily při 25 °C 1189 kg m^{-3} a $1{,}323 \cdot 10^{-2}$ kg m^{-1} s^{-1}.

Výsledky a diskuse

Naměřené hodnoty terminálních pádových rychlostí se pohybují v pásmu od 1,2 do 27,2 cm s^{-1}. Jsou uvedeny spolu s příslušnými hodnotami součinitele odporu, Archimedových a Reynoldsových kriterií v tab. I. Tyto výsledky spolu s nedávno zveřejněnými experimentálními výsledky jiných autorů[21,24,25] jsme použili při hledání vhodné regresní funkce $C_D = C_D\,(Re_t)$.

Tabulka I
Naměřené terminální pádové rychlosti skleněných kuliček v dimetylesteru kyseliny ftalové při 25 °C

Průměr částic, d_p [mm]	*Ar*	Pádová rychlost, U_t [cm s^{-1}]	C_D	Re_t
0,463	10,016	1,204	53,21	0,5010
0,600	20,011	1,765	29,44	0,9520
1,152	141,42	5,012	7,003	5,189
1,236	174,73	5,481	6,286	6,088
2,023	766,61	10,58	2,763	19,234
2,510	1464,6	13,54	2,094	30,538
3,182	2982,4	17,59	1,572	50,295
3,953	5721,9	22,03	1,246	78,249
4,421	8003,5	24,68	1,110	98,050
4,911	10969	27,21	1,014	120,100

Tabulka II
Soubory experimentálních dat použitých k odvození regresních rovnic

Autoři	Ar	Re_t	C_D
Tato práce	$10–11·10^3$	0,5–120	53,2–1,01
Pettyjohn a Christiansen[21]	$12–1,8·10^8$	$0,62–22,6·10^3$	41,9–0,46
Di Felice[24]	$0,3–3,3·10^5$	0,016–929	1542–0,51
Kelessidis[25]	$1,5–5·10^5$	0,08–1166	306–0,49

Výše zmíněný přístup Abrahama[17] vede k velmi jednoduchému vztahu (*1*).

$$C_D = 1/a\,[\,1 + (b/Re_t)^{0,5}\,]^2 \qquad (1)$$

Protože experimentální data[18–20] vykazují velmi mírné, nicméně zřetelné minimum v hodnotách součinitele odporu při hodnotách Reynoldsova kriteria kolem 5000, byl tento bod zvolen jako hraniční mezi dvěma regresními segmenty. Je evidentní, že funkce definovaná rovnicí (*1*) má průběh monotonní. Hodnoty regresních konstant *a* a *b* v rovnici (*1*) byly určeny z experimentálních dat popsaných v tab. II pomocí standardní a dříve osvědčené simplexové procedury[26]. Výsledné regresní rovnice lze zapsat velmi jednoduše jako

$$C_D = 0,3100\,(1 + 8,605/Re_t^{0,5})^2 \qquad (2)$$

pro $Re_t \in < 0,1;5000 >$
a

$$C_D = 0,5159\,(1 - 9,229/Re_t^{0,5})^2 \qquad (3)$$

pro $Re_t \in < 5000 ; 10^5 >$

Přiléhavost regresních vztahů (*2*) a (*3*) byla následně testována jak na experimentálních datech, tak na predikcích komplikovaných rovnic z literatury[18–20]. Výsledky srovnávacích výpočtů jsou uvedeny v tab. III. Je vidět, že navržené rovnice (*2*) a (*3*) jsou ve velmi dobré shodě s experimentálními daty i s hodnotami C_D vypočtenými z mnohem složitějších formulí. Je na místě připomenout, že chyba v součiniteli odporu rezultuje v chybě přibližně poloviční v pádové rychlosti podle

$$\Delta Re_t / Re_t = [1 - (1 + \Delta C_D / C_D)^{0,5}] / (1 + \Delta C_D / C_D)^{0,5} \qquad (4)$$

Jedinečnost rovnic (*2*) a (*3*) netkví jen v jejich neobyčejné jednoduchosti a přesnosti, ale i v nanejvýše vhodném či praktickém tvaru. Díky němu lze snadno odvodit soubor explicitních vztahů, které nám umožňují okamžitě a spolehlivě vyřešit všechny praktické výpočtové úlohy s terminálními pádovými rychlostmi kulovitých částic. Pro popis podmínek usazování či úletu se ukazuje jako účelné používat také bezrozměrné kriterium terminální pádové rychlosti, y_t, definované jako

$$y_t = Re_t^3 / Ar \qquad (5)$$

ve kterém, jak plyne z této definice, se nevyskytuje průměr částice. Rovnice (*2*) a (*3*) můžeme potom snadno přepsat na funkce y_t:

$$C_D^{0,5} = 0,2784\,[\,1 + (\,1 + 71,39/\,y_t^{0,5})^{0,5}] \qquad (6)$$

pro $y_t \in < 5,4·10^{-4} ; 1,71·10^4 >$
a

$$C_D^{0,5} = 0,3591\,[\,1 + (\,1 - 59,35\,/\,y_t^{0,5})^{0,5}] \qquad (7)$$

pro $y_r \in < 1,71·10^4 ; 2,74·10^5 >$

Podobně můžeme odvodit jednoduché explicitní vztahy umožňující přímé a přesné řešení při hledání terminální pádové rychlosti pro částici daného průměru:

$$Re_t = 18,51\,[\,(\,1 + 0,1120\,Ar^{0,5}\,)^{0,5} - 1]^2 \qquad (8)$$

pro $Ar \in < 1,85 ; 7,31·10^6 >$
a

$$Re_t = 21,29\,[\,(\,1 + 0,07550\,Ar^{0,5}\,)^{0,5} + 1]^2 \qquad (9)$$

pro $Ar \in < 7,31·10^6 ; 3,65·10^9 >$

Podobné poměrně jednoduché vztahy pro výpočet součinitele odporu koule a pro explicitní výpočet pádové rychlosti koule navrhují Khan a Richardson[27]. Regresní formule těchto autorů však nepostihují výskyt minima

Tabulka III
Srovnání součinitele odporu, C_D, vypočteného z odvozených jednoduchých regresních rovnic (*2*) nebo (*3*) s experimentálními daty různých autorů a s predikcemi komplikovaných rovnic z literatury

Zdroj C_D	Počet dvojic dat	Relativní odchylky $(\Delta C_D / C_D) \times 100$	Střední relativní odchylka, [%]
Tato práce	10	−1,1 – +3,4	±2,2
Pettyjohn a Christiansen[21]	16	−6 – +9	±4,0
Di Felice[24]	11	−10 – +12	±6,5
Kelessidis[25]	8	−11 – +9	±6,7
Clift a spol.[18]	13[a]	−6 – +3	±3,2
Flemmer a Banks[19]	13[a]	−11 – +3	±5,5
Turton a Levenspiel[20]	13[a]	−9 – +1	±2,5

[a] Pro hodnoty Re_t rovnoměrně rozdělené na logaritmické stupnici v intervalu $< 0,1 ; 10^5 >$

závislosti $C_D = C_D (Re_t)$.

Druhou nejčastěji hledanou veličinou je průměr částice pro zájmovou terminální pádovou rychlost. Následující jednoduché explicitní rovnice vedou k přímému a přesnému řešení takovéto úlohy:

$$1 / Re_t^{0,5} = 0,05811 [(1 + 71,39 / y_t^{0,5})^{0,5} - 1] \qquad (10)$$

pro $y_t \in < 5,4 \cdot 10^{-4} ; 1,71 \cdot 10^4 >$

a

$$1 / Re_t^{0,5} = 0,05418 [1 - (1 - 59,35/ y_t^{0,5})^{0,5}] \qquad (11)$$

pro $y_t \in < 1,71 \cdot 10^4 ; 2,74 \cdot 10^5 >$

Postludium

Ve svém klasickém díle Bird a spol.[28] v jedné z kapitol řeší průměr skleněné koule (ρ_p = 2620 kg m^{-3}) padající chloridem uhličitým při teplotě 20 °C (ρ_f = 1590 kg m^{-3}, $\mu_f = 9,58 \cdot 10^{-4}$ kg m^{-1} s^{-1}, rychlostí 0,65 m s^{-1}. Iterační řešení s použitím pětikonstantového regresního vztahu pro součinitele odporu, C_D, navrženého Turtonem a Levenspielem[20] vede k průměru padající kuličky d_p = 2,277 cm. Výše zmíněné pádové podmínky odpovídají kriteriu y_t = 71745,6. Prostým dosazením této hodnoty do rovnice (*11*) dostaneme Re_t = 24584 a tím d_p = 2,279 cm. Rozdíl mezi výsledky činí přibližně 0,1 % a je prakticky nevýznamný. Grafickým postupem došli autoři[28] k d_p = 2,2 cm.

Vliv tvaru částic na pádovou rychlost je možno odhadnout z transformovaného vztahu (*12*) Haidera a Levenspiela[22]. Hodnoty sfericity různých těles a některých materiálů jsme prezentovali ve své dřívější práci[29].

$$Re_t = Ar / [18 + (2,335 - 1,744\ \Psi)\ Ar^{0,5}] \qquad (12)$$

Závěr

Navržené, velice jednoduché regresní vztahy (*2*) a (*3*) pro součinitele odporu kulovitých částic velmi dobře vystihují jak experimentální data, tak i predikce mnohem komplikovanějších empirických rovnic v celé zájmové oblasti hydrodynamických podmínek ($Re_t \in < 0,1 ; 10^5 >$). Jedinečný tvar regresních vztahů (*2*) a (*3*) umožňuje formulovat jednoduché explicitní rovnice pro přímé a spolehlivé výpočty terminální pádové rychlosti daných částic a/nebo velikosti částic odpovídající zájmové pádové rychlosti. Přesnost takovýchto přímých výpočtů není o nic menší než přesnost postupů iteračních, jež využívají komplikované regresní rovnice pro součinitele odporu.

Seznam symbolů

Ar	Archimedovo kriterium = $d_p^3\ g\ \rho_f\ (\rho_p - \rho_f) / \mu_f^2$ = (3/4) $C_D\ Re_t^2 = Re_t^3 / y_t$
a	regresní konstanta v rov. (*1*)
b	regresní konstanta v rov. (*1*)
C_D	součinitel odporu kulovité částice = (4/3) Ar / Re_t^2 = (4/3) $Re_t / y_t = 4\ g\ d_p\ (\rho_p - \rho_f) / (3\ U_t^2\ \rho_f)$
d_p	průměr kulovité částice, m, mm
g	tíhové zrychlení = 9,807, m s^{-2}
Re_t	Reynoldsovo kriterium při terminální (ustálené) rychlosti částice padající v nehybné tekutině = $U_t\ d_p\ \rho_f / \mu_f$ = (3/4) $C_D\ y_t = [(4/3)\ Ar / C_D]^{0,5}$
y_t	kriterium pro terminální pádovou rychlost = Re_t^3 / Ar = (4/3) $Re_t / C_D = U_t^3\ \rho_f^2 / [g\ (\rho_p - \rho_f)\ \mu_f]$
Δ	rozdíl v C_D nebo Re_t
μ_f	viskozita tekutiny, kg m^{-1} s^{-1}, Pa s
ρ_f	hustota tekutiny, kg m^{-3}
ρ_p	zdánlivá (rtuťová) hustota částice, kg m^{-3}
Ψ	sfericita částice, tvarový faktor

Práce vznikla v rámci grantového projektu IAA 400720701 podporovaného Grantovou agenturou Akademie věd ČR. Autoři děkují recenzentovi za konstruktivní připomínky k práci.

LITERATURA

1. Hartman M., Trnka O., Svoboda K., Veselý V.: Chem. Listy *95*, 556 (2001).
2. Hartman M., Trnka O., Svoboda K., Veselý V.: Chem. Listy *97*, 942 (2003).
3. Pohořelý M., Svoboda K., Hartman M.: Chem. Listy *98*, 361 (2004).
4. Trnka O., Hartman M., Veselý V.: Chem. Listy *99*, 330 (2005).
5. Hartman M., Pohořelý M., Trnka O.: Chem. Pap. *60*, 74 (2006).
6. Trnka O., Hartman M.: Chem. Listy *101*, 515 (2007).
7. Pata J., Hartman M.: Ind. Eng. Chem., Process Des. Develop. *19*, 98 (1980).
8. Hartman M., Havlín V., Trnka O., Čárský M.: Chem. Eng. Sci. *44*, 1743 (1989).
9. Hartman M., Havlín V., Svoboda K., Kožan A.P.: Chem. Eng. Sci. *44*, 2770 (1989).
10. Hartman M., Veselý V., Svoboda K., Havlín V.: Collect. Czech. Chem. Commun. *55*, 403 (1990).
11. Hartman M.: Chem. Eng. Sci. *45*, 1653 (1990).
12. Hartman M., Trnka O., Veselý V.: Chem. Eng. Sci. *47*, 3162 (1992).
13. Hartman M., Yates J. G.: Collect. Czech. Chem. Commun *58*, 961 (1993).
14. Hartman M., Beran Z., Svoboda K., Veselý V.: Collect. Czech. Chem. Commun. *60*, 1 (1995).
15. Hartman M., Trnka O., Svoboda K., Veselý V.: Collect. Czech. Chem. Commun. *59*, 2583 (1994).
16. Hartman M., Trnka O., Svoboda K.: Ind. Eng. Chem. Res. *33*, 1979 (1994).
17. Abraham F. F.: Phys. Fluids *13*, 2194 (1970).
18. Clift R., Grace J. R., Weber M. E.: *Bubbles, Drops, and Particles*. Academia Press, New York 1978.

19. Flemmer R. L. C., Banks C. L.: Powder Technol. *48*, 217 (1986).
20. Turton R., Levenspiel O.: Powder Technol. *47*, 83 (1986).
21. Pettyjohn E. S., Christiansen E. B.: Chem. Eng. Prog. *44*, 157 (1948).
22. Haider A., Levenspiel O.: Powder Technol. *58*, 63 (1989).
23. Hartman M., Trnka O., Svoboda K.: Ind. Eng. Chem. Res. *33*, 1979 (1994).
24. Di Felice R.: Int. J. Multiphase Flow *25*, 559 (1999).
25. Kelessidis V. C.: Chem. Eng. Sci. *59*, 4437 (2004).
26. Hartman M., Trnka O.: AIChE J. *39*, 615 (1993).
27. Khan A. R., Richardson J. F.: Chem. Eng. Commun. *62*, 135 (1987).
28. Bird R. B., Stewart W. E., Lightfoot E. N.: *Transport Phenomena*, 2. vyd. Wiley, New York 2007.
29. Hartman M., Coughlin R. W.: Collect. Czech. Chem. Commun. *58*, 1213 (1993).

M. Hartman, O. Trnka, and M. Pohořelý *(Institute of Chemical Processes, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague):* **Novel Explicit Formulae for Estimation of Free-Fall Conditions for Solid Particles**

A series of correlations have been proposed which make it possible to predict, accurately and rapidly, the drag coefficient, terminal velocity and diameters of spherical solid particles falling freely through quiescent Newtonian fluids for a wide range of Reynolds numbers of particles (Re_t = 10^{-1}–10^5). The experiments were conducted with dimethyl phthalate and 0,463–4,911 mm glass beads in a glass column (ID 10 cm). The employment of the proposed formulae avoids the need for trial-and-error computations. The formulae favorably compare with own and literature experimental data as well as with much more involved regression equations for the drag coefficient jn literature.